Veneziano 振幅について

高橋　智彦

奈良女子大学研究院自然科学系物理学領域

§1.　開弦の４弦振幅

弦座標 $X^\mu(z)$ を

$$X^\mu(z) = \hat{x}^\mu - 2i\alpha' \hat{p}^\mu \ln z + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu z^{-n} \tag{1·1}$$

のように振動子で展開すると、次の交換関係が成り立つ。

$$[\hat{x}^\mu,\, \hat{p}^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [\alpha_m^\mu,\, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n,0}\eta^{\mu\nu} \tag{1·2}$$

真空 $|0\rangle$ は

$$\hat{p}^\mu |0\rangle = 0, \quad \alpha_n^\mu |0\rangle = 0 \quad (n \geq 1) \tag{1·3}$$

として定義される。また、$\langle\tilde{0}|$ を

$$\langle\tilde{0}|\, \hat{x} = 0, \quad \langle\tilde{0}|\, \alpha_{-n}^\mu = 0 \quad (n \geq 1) \tag{1·4}$$

とし、$\langle\tilde{0}|0\rangle = 1$ のように規格化しておく。

$|z| > |z'|$ として、演算子 $X^\mu(z)$ 二つの積を計算すると

$$\begin{aligned} X^\mu(z)X^\nu(z') &= -2i\alpha' \hat{p}^\mu \ln z\, \hat{x}^\nu - 2\alpha' \sum_{n>0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu z^{-n} \sum_{m>0} \frac{-1}{m} \alpha_{-m}^\mu z'^m + \cdots \\ &= -2\alpha'\eta^{\mu\nu} \ln z + 2\alpha'\eta^{\mu\nu} \sum_{n>0} \frac{1}{n} \left(\frac{z'}{z}\right)^n + \cdots \\ &= -2\alpha'\eta^{\mu\nu} \ln z - 2\alpha'\eta^{\mu\nu} \ln\left(1 - \frac{z'}{z}\right) + \cdots \\ &= -2\alpha'\eta^{\mu\nu} \ln(z - z') + \cdots \end{aligned} \tag{1·5}$$

ここで、$\cdots$ は真空に作用して消える部分を表している。ゆえに、$\mathrm{R}[\cdots]$ で R 積を表すと

$$\langle\tilde{0}|\, \mathrm{R}\left[X^\mu(z)X^\nu(z')\right] |0\rangle = -2\alpha'\eta^{\mu\nu} \ln(z - z') \tag{1·6}$$

となる。以下では記号 R を省略する。

点粒子の平面波に対応した開弦の状態について考えれば、直感的に、運動量 k^μ をもつ状態を $e^{ik\cdot X(z)}$ とすればよいと期待される。この演算子は演算子の局所積（の無限和）による発散を含むから、この演算子を発散がないように正規積を用いて定義する。

$$e^{ik\cdot X(z)} = e^{\sqrt{2\alpha'} \sum_{n>0} \frac{1}{n} k\cdot\alpha_{-n} z^n} e^{ik\cdot\hat{x}} e^{2\alpha' k\cdot\hat{p}} e^{-\sqrt{2\alpha'} \sum_{n>0} \frac{1}{n} k\cdot\alpha_n z^{-n}} \tag{1·7}$$

この演算子の二点関数を $|z| > |z'|$ として計算すると、

$$\begin{aligned}\langle 0|\, e^{ik\cdot X(z)} e^{ik'\cdot X(z')}\,|0\rangle &= \langle 0|\, e^{ik\cdot\hat{x}} e^{2\alpha' k\cdot\hat{p}\ln z} e^{-\sqrt{2\alpha'}\sum_{n>0}\frac{1}{n}k\cdot\alpha_n z^{-n}} \times \\ &\quad \times e^{\sqrt{2\alpha'}\sum_{n>0}\frac{1}{n}k'\cdot\alpha_{-n}z'^n} e^{ik'\cdot\hat{x}}\,|0\rangle \\ &= \langle 0|\, e^{ik\cdot\hat{x}} e^{2\alpha' k\cdot\hat{p}\ln z} e^{ik'\cdot\hat{x}}\,|0\rangle \times \\ &\quad \times \langle 0|\, e^{-\sqrt{2\alpha'}\sum_{n>0}\frac{1}{n}k\cdot\alpha_n z^{-n}} e^{\sqrt{2\alpha'}\sum_{n>0}\frac{1}{n}k'\cdot\alpha_{-n}z'^n}\,|0\rangle \\ &= e^{2\alpha' k\cdot k'\ln z}\,\langle 0|\, e^{ik\cdot\hat{x}} e^{ik'\cdot\hat{x}}\,|0\rangle \times e^{-2\alpha' k\cdot k'\sum_{n>0}\frac{1}{n}\left(\frac{z'}{z}\right)^n} \\ &= (2\pi)^d \delta^d(k+k') e^{2\alpha' k\cdot k'\ln(z-z')} \\ &= (2\pi)^d \delta^d(k+k')(z-z')^{2\alpha' k\cdot k'} \end{aligned} \tag{1·8}$$

となる。これは、二点関数が (1·6) を用いて

$$\begin{aligned}\langle 0|\, e^{ik\cdot X(z)} e^{ik'\cdot X(z')}\,|0\rangle &= (2\pi)^d \delta^d(k+k') e^{-k_\mu k'_\nu \langle\tilde{0}|X^\mu(z)X^\nu(z')|0\rangle} \\ &= (2\pi)^d \delta^d(k+k') e^{2\alpha' k\cdot k'\ln(z-z')} \\ &= (2\pi)^d \delta^d(k+k')(z-z')^{2\alpha' k\cdot k'} \end{aligned} \tag{1·9}$$

と計算できることを示している。

さて、平面波を拡張した状態４つの相関関数についてみる。演算子の位置 $z_i (i = 1,\cdots,4)$ がすべて実軸上にある場合、この相関関数は開弦の 4 弦振幅を表しており、二点関数と同様に計算すれば

$$\begin{aligned}&\langle 0|\, e^{ik_1\cdot X(z_1)} e^{ik_2\cdot X(z_2)} e^{ik_3\cdot X(z_3)} e^{ik_3\cdot X(z_3)}\,|0\rangle \\ &= (2\pi)^d \delta^d\left(\sum_{i=1}^4 k_i\right)\prod_{i<j}|z_i - z_j|^{2\alpha' k_i\cdot k_j}\end{aligned} \tag{1·10}$$

弦理論の出発点である Polyakov 作用は、世界面の一般座標変換とワイル変換の下で不変である。これらの不変性の結果、開弦の散乱振幅は、$SL(2,\mathbf{R})$ 変換*)

$$z \to z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc=1,\ a,b,c,d\in\mathbf{R}) \tag{1·11}$$

の下で不変となるが、ここでは、この不変性が成り立つように散乱振幅を構成していくことにする。

$SL(2,\mathbf{R})$ 変換によって、$z_i - z_j$ は

$$z'_i - z'_j = \frac{z_i - z_j}{(cz_i+d)(cz_j+d)} \tag{1·12}$$

と変換するから、

$$\begin{aligned}\prod_{i<j}|z'_i - z'_j|^{2\alpha' k_i\cdot k_j} &= |cz_1+d|^{-2\alpha' k_1\cdot(k_2+k_3+k_4)}|cz_2+d|^{-2\alpha' k_2\cdot(k_1+k_3+k_4)} \times \\ &\quad \times |cz_3+d|^{-2\alpha' k_3\cdot(k_1+k_2+k_4)}|cz_4+d|^{-2\alpha' k_4\cdot(k_1+k_2+k_3)} \\ &\quad \times \prod_{i<j}|z_i - z_j|^{2\alpha' k_i\cdot k_j}\end{aligned} \tag{1·13}$$

*) 正確には $PSL(2,\mathbf{R})$

ここで、デルタ関数因子による運動量の保存則を用いると

$$\prod_{i<j}|z'_i - z'_j|^{2\alpha' k_i\cdot k_j} = \prod_{i=1}^{4}|cz_i+d|^{2\alpha' k_i^2}\prod_{i<j}|z_i - z_j|^{2\alpha' k_i\cdot k_j} \tag{1·14}$$

したがって、散乱振幅が $SL(2,\mathbf{R})$ 変換で不変となるためには、式 (1·14) 右辺の第一因子を打ち消す必要がある。そのために、次の因子

$$dz_4|z_1-z_2||z_1-z_3||z_2-z_3| \tag{1·15}$$

を考える。dz の $SL(2,\mathbf{R})$ 変換が

$$dz' = \frac{dz}{(cz+d)^2} \tag{1·16}$$

となることから、$\alpha' k_i^2 = 1$ が成り立てば、次式

$$\mathcal{A} = \int dz_4|z_1-z_2||z_1-z_3||z_2-z_3|\prod_{i<j}|z_i-z_j|^{2\alpha' k_i\cdot k_j} \tag{1·17}$$

が $SL(2,\mathbf{R})$ の下で不変なことがわかる。$\alpha' k_i^2 = 1$ は質量殻条件であり、この開弦の状態が $m^2 = -1/\alpha'(<0)$ をみたすタキオンであることを表している。

　$SL(2,\mathbf{R})$ 変換は、実軸上の相異なる 3 点を任意の相異なる 3 点に写すことができるから、$z_1=0$、$z_2=-\infty$、$z_3=1$ とすると ($z_4=x$ と書く)

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 dx|z_2||z_2-1||z_2|^{2\alpha' k_1\cdot k_2}x^{2\alpha' k_1\cdot k_4}|z_2-1|^{2\alpha' k_2\cdot k_3}|z_2-x|^{2\alpha' k_2\cdot k_4}|1-x|^{2\alpha' k_3\cdot k_4}\\ &= \int_0^1 dx|z_2|^{2+2\alpha' k_2(k_1+k_3+k_4)}x^{2\alpha' k_1\cdot k_4}|1-x|^{2\alpha' k_3\cdot k_4}\\ &= \int_0^1 dx x^{2\alpha' k_1\cdot k_4}(1-x)^{2\alpha' k_3\cdot k_4}\end{aligned} \tag{1·18}$$

最後の行では運動量の保存則と質量殻条件を用いた。ここで、$s=-(k_1+k_2)^2$、$t=-(k_1+k_4)^2$ というパラメータを導入すると

$$\begin{aligned}2\alpha' k_3\cdot k_4 &= \alpha'(k_3+k_4)^2 - \alpha' k_3^2 - \alpha' k_4^2\\ &= \alpha'(k_1+k_2)^2 - 2 = -\alpha' s - 2\end{aligned} \tag{1·19}$$

$$2\alpha' k_1\cdot k_4 = \alpha'(k_1+k_4)^2 - \alpha' k_1^2 - \alpha' k_4^2 = -\alpha' t - 2 \tag{1·20}$$

となるから、Veneziano 振幅とよばれる開弦の 4 弦振幅の表式

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 dx x^{-\alpha' t-2}(1-x)^{-\alpha' t-2}\\ &= B(-\alpha' s-1, -\alpha' t-1) = \frac{\Gamma(-\alpha' s-1)\Gamma(-\alpha' t-1)}{\Gamma(-\alpha'(s+t)-2)}\end{aligned} \tag{1·21}$$

を得る。この表式は s, t について解析接続して複素平面全体で成り立つものとする。すると、ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は $z = -n$ $(n = 0, 1, \cdots)$ に 1 位の極をもつから、散乱振幅は

$$s = \frac{n}{\alpha'} \quad (n = -1, 0, 1, 2, \cdots), \quad t = \frac{n}{\alpha'} \quad (n = -1, 0, 1, 2, \cdots) \tag{1·22}$$

に 1 位の極をもつことがわかる。散乱振幅が s チャンネルと t チャンネルのどちらで見ても変わらないという性質のことを双対性という。

§2. 閉弦の 4 弦振幅

次に、閉弦の 4 弦振幅について考えてみる。閉弦のタキオン状態を表す演算子は

$$e^{ik\cdot X(z,\bar{z})} \tag{2·1}$$

ただし、弦座標は

$$X^\mu(z,\bar{z}) = \hat{x}^\mu - i\alpha'\hat{p}^\mu(\ln z + \ln\bar{z}) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(\alpha_n^\mu z^{-n} + \tilde{\alpha}_n^\mu \bar{z}^{-n}) \tag{2·2}$$

で与えられ、$\tilde{\alpha}_n^\mu$ は α_n^μ と同様の交換関係をみたす。弦座標の積を計算すると ($|z| > |z'|$ とする)

$$\begin{aligned} X^\mu(z,\bar{z})X^\nu(z,\bar{z}) &= -\alpha'\eta^{\mu\nu}(\ln z + \ln\bar{z}) \\ &\quad -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln\left(1-\frac{z'}{z}\right) - \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln\left(1-\frac{\bar{z}'}{\bar{z}}\right) + \cdots \\ &= -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z-z'|^2 + \cdots \end{aligned} \tag{2·3}$$

タキオン状態 4 つの相関関数を計算すると

$$\begin{aligned} &\langle 0|\, e^{ik_1\cdot X(z_1,\bar{z}_1)} e^{ik_2\cdot X(z_2,\bar{z}_2)} e^{ik_3\cdot X(z_3,\bar{z}_3)} e^{ik_4\cdot X(z_4,\bar{z}_4)}\, |0\rangle \\ &= (2\pi)^d \delta\left(\sum_{i=1}^4 k_i\right) \prod_{j<j} (z_i - z_j)^{\frac{\alpha'}{2}k_i\cdot k_j} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^{\frac{\alpha'}{2}k_i\cdot k_j} \end{aligned} \tag{2·4}$$

閉弦の散乱振幅が $SL(2,\mathbf{C})$ 変換の下での不変性をもつことを考慮すると、

$$\mathcal{A} = \int d^2z_4 |z_1 - z_2|^2 |z_1 - z_3|^2 |z_2 - z_3|^2 \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{\alpha' k_i\cdot k_j} \tag{2·5}$$

という表式を得る。質量殻条件は $\alpha' k_i^2 = 4$ である。ただし、$z_4 = x_4 + iy_4$、$d^2z_4 = dx_4 dy_4$ とし、複素平面全体で積分するもとする。

$SL(2,\mathbf{C})$ 変換は複素平面上の相異なる 3 点を任意の相異なる 3 点に写せるから、再び $z_1 = 0$、$z_2 = -\infty$、$z_3 = 1$ とすると ($z_4 = z = x + iy$)、

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int d^2z |z_2|^2 |z_2 - 1|^2 |z_2|^{\alpha' k_1\cdot k_2} |z|^{\alpha' k_1\cdot k_4} |z_2 - 1|^{\alpha' k_2\cdot k_3} |z_2 - z|^{\alpha' k_2\cdot k_4} |1 - z|^{\alpha' k_3\cdot k_4} \\ &= \int d^2z |z_2|^{4+\alpha' k_2(k_1+k_3+k_4)} |z|^{\alpha' k_1\cdot k_4} |1 - z|^{\alpha' k_3\cdot k_4} \\ &= \int d^2z |z|^{\alpha' k_1\cdot k_4} |1 - z|^{\alpha' k_3\cdot k_4} \end{aligned} \tag{2·6}$$

$s = -(k_1 + k_2)^2$、$t = -(k_1 + k_4)^2$ とおくと、

$$\alpha' k_3 \cdot k_4 = -\alpha' s/2 - 4, \qquad \alpha' k_1 \cdot k_4 = -\alpha' t/2 - 4 \tag{2·7}$$

だから

$$\mathcal{A} = \int d^2 z |z|^{-\alpha' s/2-4} |1-z|^{-\alpha' t/2-4} \tag{2·8}$$

以下ではこの積分計算を実行していこう。ガンマ関数の積分表式

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty du u^{a-1} e^{-u} \quad (\mathrm{Re}(a) > 0) \tag{2·9}$$

において、$u = |z|^2 v$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= |z|^{2a} \int_0^\infty dv v^{a-1} e^{-|z|^2 v} \\ \therefore \quad & \\ |z|^{-2a} &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty dv v^{a-1} e^{-|z|^2 v} \end{aligned} \tag{2·10}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} & \int d^2 z |z|^{-2a} |1-z|^{-2b} \quad (\mathrm{Re}(a) > 0,\ \mathrm{Re}(b) > 0) \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^\infty du \int_0^\infty dv\, u^{a-1} v^{b-1} \int d^2 z\, e^{-|z|^2 u - |1-z|^2 v} \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^\infty du \int_0^\infty dv\, u^{a-1} v^{b-1} \int d^2 z\, e^{-(u+v)x^2 + 2xv - v - (u+v)y^2} \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^\infty du \int_0^\infty dv\, u^{a-1} v^{b-1} e^{-v} \int dx\, e^{-(u+v)\left(x - \frac{v}{u+v}\right)^2 + \frac{v^2}{u+v}} \times \\ & \quad \times \int dy\, e^{-(u+v)y^2} \\ &= \frac{\pi}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^\infty du \int_0^\infty dv\, \frac{u^{a-1} v^{b-1}}{u+v}\, e^{-\frac{uv}{u+v}} \end{aligned} \tag{2·11}$$

さらに、$u = pq$、$v = p(1-q)$ と変数変換すると

$$= \frac{\pi}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^\infty dp \int_0^1 dq\, p^{a+b-2}\, q^{a-1} (1-q)^{b-1} e^{-pq(1-q)} \tag{2·12}$$

$\mathrm{Re(a + b - 1)} > 0$ とすると

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 dq\, q^{a-1} (1-q)^{b-1} \{q(1-q)\}^{-a-b+1} \Gamma(a+b-1) \\ &= \frac{\pi \Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 dq\, q^{-b} (1-q)^{-a} \end{aligned} \tag{2·13}$$

$\mathrm{Re}(1-a)>0,\ \mathrm{Re}(1-b)>0$ とすると

$$= \frac{\pi\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}{\Gamma(2-a-b)} \tag{2·14}$$

ゆえに、$0<\mathrm{Re}(a)<1,\ 0<\mathrm{Re}(b)<1,\ \mathrm{Re}(a+b)>1$ のとき

$$\int d^2|z|^{2a-2}|1-z|^{2b-2} = \pi\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(1-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma(a+b)} \tag{2·15}$$

が成り立つ。

この式を用いれば、散乱振幅は

$$\mathcal{A} = \pi\frac{\Gamma(-\alpha's/4-1)\Gamma(-\alpha't/4-1)\Gamma(3+\alpha'(s+t)/4)}{\Gamma(2+\alpha's/4)\Gamma(2+\alpha't/4)\Gamma(-2-\alpha'(s+t)/4)} \tag{2·16}$$

この表式は s,t について解析接続をして複素平面全体で成り立つものとする。u チャンネルの変数を $u=-(k_1+k_3)^2$ とすれば

$$\begin{aligned}\alpha'(s+t+u) &= -\alpha'(k_1+k_2)^2-\alpha'(k_1+k_4)^2-\alpha'(k_1+k_3)^2\\ &= -4\times 6-2\alpha'k_1(k_2+k_3+k_4)\\ &= -4\times 6+2\times 4=-16\\ \Rightarrow\quad \alpha'(s+t)/4 &= -\alpha'u/4-4\end{aligned} \tag{2·17}$$

ゆえに、閉弦タキオン状態の 4 弦振幅は s,t,u 変数について対称に書くことができ

$$\mathcal{A} = \pi\frac{\Gamma(-\alpha's/4-1)\Gamma(-\alpha't/4-1)\Gamma(-\alpha'u/4-1)}{\Gamma(2+\alpha's/4)\Gamma(2+\alpha't/4)\Gamma(2+\alpha'u/4)} \tag{2·18}$$

となる。開弦の場合と同様に、散乱振幅は s,t,u について

$$s,t,u=\frac{4n}{\alpha'}\quad (n=-1,0,1,2,\cdots) \tag{2·19}$$

の位置に 1 位の極をもつことがわかる。

(January 27, 2015)