dRGT 重力理論における運動方程式について

高橋　智彦

奈良女子大学研究院自然科学系物理学領域

§1. dRGT 理論と Fierz-Pauli 質量項

Einstein によって 1916 年に提唱された一般相対性理論は、重力を記述する理論、また宇宙論の基礎として、素晴らしい成功をおさめてきた。ところが、近年の観測は宇宙背景輻射の精密データや宇宙の加速膨張の発見をもたらし、暗黒物質、暗黒エネルギー、さらには修正重力理論の必要性が検討されるに至っている。

数多ある修正重力理論の一つとして Einstein の理論に質量項を加えた理論が考えられている。重力に質量が加わると大きな距離での力が弱くなるため、十分に離れた星々の間にはたらく引力が弱くなり、宇宙膨張を止めようとする傾向が質量のない場合に比べて小さくなる。直感的には、膨張が食い止められる分、宇宙膨張の速度がより大きくなって加速膨張が起こるように期待される。

重力に質量項を加えると言っても実は簡単ではない。van Dam-Veltman-Zakharov 不連続性[1),2)]や Boulware-Deser ゴースト[3)]の存在が問題だったのだ。1970 年代に認識されたこれらの問題は、de Rham, Gabadadze, Tolley による dRGT 理論[4),5)]によって 2010 年に解決されることとなったようだ。

dRGT 理論の作用は

$$S[g_{\mu\nu}, Y^M] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\left[R - 2m^2\mathcal{L}_{\rm mass}\right] \tag{1·1}$$

である。ここで、G は万有引力定数あり、R はスカラー曲率で Einstein 重力を与える項である。質量項 $\mathcal{L}_{\rm mass}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\rm mass} = &\frac{1}{2}\left\{{\rm tr}(K)^2 - {\rm tr}(K^2)\right\} + \frac{c_3}{3!}\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\lambda}\epsilon^{\nu_1\nu_2\nu_3\lambda}K^{\mu_1}_{\nu_1}K^{\mu_2}_{\nu_2}K^{\mu_3}_{\nu_3}\\ &+\frac{c_4}{4!}\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\epsilon^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}K^{\mu_1}_{\nu_1}K^{\mu_2}_{\nu_2}K^{\mu_3}_{\nu_3}K^{\mu_4}_{\nu_4}\end{aligned} \tag{1·2}$$

ただし、c_3 と c_4 はパラメータであり、行列 K は

$$K^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \gamma^\mu{}_\nu, \quad \gamma^\mu{}_\nu = \sqrt{g^{\mu\sigma}f_{\sigma\nu}} \tag{1·3}$$

のように行列の平方根を用いて定義される。$f_{\mu\nu}$ は標準計量 (fiducial metric) と呼ばれ、平坦なミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ におかれる。$f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ としてしまうと一般座標変換の下での不変性が壊れてしまうので、Stückelberg 場 Y^M $(M = 0, \cdots, 3)$ を導入して

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu Y^M G_{MN}\partial_\nu Y^N \tag{1·4}$$

とすれば不変性を保つことができ、必要があれば一般座標変換を用いて $f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ とすることができる。

重力場が弱い場合について考えてみる。$f_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$ として、計量テンソルを Minkowski 計量のまわりで

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu} \tag{1·5}$$

のように展開すると、

$$\gamma^{\mu}{}_{\nu}=\sqrt{\delta^{\mu}{}_{\nu}-h^{\mu}{}_{\nu}+\cdots}=\delta^{\mu}{}_{\nu}-\frac{1}{2}h^{\mu}{}_{\nu}+\cdots \tag{1·6}$$

$$K^{\mu}{}_{\nu}=\frac{1}{2}h^{\mu}{}_{\nu}+\cdots \tag{1·7}$$

これを質量項に代入して $h^{\mu}{}_{\nu}$ の 2 次まで展開すると

$$\mathcal{L}_{\rm mass}=\frac{1}{8}\left\{(h^{\mu}{}_{\mu})^2-h^{\mu}{}_{\nu}h^{\nu}{}_{\nu}\right\}+\cdots \tag{1·8}$$

c_3、c_4 を含む項は $h_{\mu\nu}$ の 3 次以上の項である。この展開式を用いれば、$h^{\mu\nu}$ についての作用の変分が次のように得られる。($h=h^{\mu}{}_{\mu}$ とおく)

$$\begin{aligned}\delta S&=-\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\frac{m^2}{2}\left(h_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}h\right)+\cdots\right]\delta h^{\mu\nu}\\&=-\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\left[\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial_\nu h-\partial_\mu\partial_\lambda h^{\lambda}{}_{\nu}-\partial_\nu\partial_\lambda h^{\lambda}{}_{\mu}+\partial^2h_{\mu\nu}\right)\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial^2h-\partial_\lambda\partial_\rho h^{\lambda\rho})+\frac{m^2}{2}\left(h_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}h\right)+\cdots\right]\delta h^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{1·9}$$

ゆえに、$h_{\mu\nu}$ の一次までの運動方程式が

$$\begin{aligned}&\partial_\mu\partial_\nu h-\partial_\mu\partial_\lambda h^{\lambda}{}_{\nu}-\partial_\nu\partial_\lambda h^{\lambda}{}_{\mu}+\partial^2h_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}(\partial^2h-\partial_\lambda\partial_\rho h^{\lambda\rho})\\&+m^2\left(h_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}h\right)=0\end{aligned} \tag{1·10}$$

のように導かれる。(1·10) に ∂^ν を演算すると

$$m^2\left(\partial^\nu h_{\mu\nu}-\partial_\mu h\right)=0\Rightarrow\partial^\nu h_{\mu\nu}=\partial_\mu h \tag{1·11}$$

この式を運動方程式に代入すれば

$$\partial^2h_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu h+m^2\left(h_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}h\right)=0 \tag{1·12}$$

この式のトレースをとって $h=0$ が導けるから、最終的に、$h_{\mu\nu}$ がみたす方程式は

$$(\partial^2+m^2)h_{\mu\nu}=0 \tag{1·13}$$

$$\partial^\nu h_{\mu\nu}=0 \tag{1·14}$$

$$h^{\mu}{}_{\mu}=0 \tag{1·15}$$

となる。これらをみたす $h_{\mu\nu}$ は質量をもつスピン 2 の場であり、Fierz-Pauli 場とよばれている。[6] dRGT 理論は Fierz-Pauli の理論を $h_{\mu\nu}$ に対して高次の項を含むように拡張した理論だとみなされる。

§2. dRGT 理論の運動方程式

$h_{\mu\nu}$ で展開する近似を行わない運動方程式について考えてみる。まず、作用 (1·1) を Einstein-Hilbert 作用と質量項にわけて、

$$S[g_{\mu\nu}, Y^M] = S_{\rm EH}[g_{\mu\nu}] + S_{\rm mass}[g_{\mu\nu}, Y^M] \tag{2·1}$$

$$S_{\rm EH}[g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}R \tag{2·2}$$

$$S_{\rm mass}[g_{\mu\nu}, Y^M] = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\, 2m^2\mathcal{L}_{\rm mass} \tag{2·3}$$

と書くことにする。$g_{\mu\nu}$ の変分から運動方程式が

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + 8\pi G\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\rm mass}}{\delta g^{\mu\nu}} = -8\pi G\, T_{\mu\nu} \tag{2·4}$$

と導ける。ここで、$T_{\mu\nu}$ は物質場のエネルギー運動量テンソルである。曲率テンソルは Bianchi 恒等式を、エネルギー運動量テンソルは保存則をみたすので、質量項からの寄与は

$$\nabla^\mu\left(\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\rm mass}}{\delta g^{\mu\nu}}\right) = 0 \tag{2·5}$$

をみたさなければならない。

dRGT 理論において、対称性などで未知関数を減らした計量について運動方程式を解く場合、方程式 (2·5) はその計量に対する標準計量 $f_{\mu\nu}$ の形を決める方程式となるが、一般には標準計量 $f_{\mu\nu}$ が Minkowski 計量 $\eta_{\mu\nu}$ になるとは限らないのは明らかだ[*)]。$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ かつ $f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ は一つの真空（運動方程式の解）を与えており、この真空上でのゆらぎの場について摂動論を考察できたが[7)]、非自明な $g_{\mu\nu}$ に対しては、$f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ が一般的には真空でないため、dRGT 理論において宇宙論などを議論する場合、非自明な標準計量を考えざるを得ない。

標準計量は、Stückelberg 場についての運動方程式

$$\frac{\delta S_{\rm mass}}{\delta Y^M} = 0 \tag{2·6}$$

を解くことで決まる。実は、この方程式 (2·6) は (2·5) に等価であることが次のようにわかる。計量テンソル $g_{\mu\nu}$ とスカラーである Y^M に対する無限小の一般座標変換は

$$\delta g^{\mu\nu} = \nabla^\mu\epsilon^\nu + \nabla^\nu\epsilon^\mu, \quad \delta Y^M = -\epsilon^\mu\partial_\mu Y^M \tag{2·7}$$

である。作用の質量項は一般座標変換で不変だから、微小変換を行うと

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\rm mass}}{\delta g^{\mu\nu}}\nabla^\mu\epsilon^\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\rm mass}}{\delta Y^M}(-\epsilon^\nu\partial_\nu Y^M)\right] \\ &= -\int d^4x\sqrt{-g}\left[\nabla^\mu\left(\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\rm mass}}{\delta g^{\mu\nu}}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\rm mass}}{\delta Y^M}\partial_\nu Y^M\right]\epsilon^\nu \end{aligned} \tag{2·8}$$

[*)] 少なくとも、$c_3 = c_4 = 0$ の場合、FRW 計量に対しては $f_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ である。

これが任意の ϵ^μ について成り立つから

$$\nabla^\mu\left(\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\rm mass}}{\delta g^{\mu\nu}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\rm mass}}{\delta Y^M}\partial_\nu Y^M \tag{2·9}$$

これから (2·6) が成り立てば (2·5) が成り立つことがわかる。もし、$\det(\partial_\mu Y^M)\neq 0$ ならば行列 $\partial_\mu Y^M$ に逆行列が存在するから、その逆も成り立つ。ゆえに、「座標変換 $x^\mu\to x'^\mu=\delta^\mu_M Y^M(x)$」が特異でなければ、

$$\nabla^\mu\left(\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\rm mass}}{\delta g^{\mu\nu}}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\delta S_{\rm mass}}{\delta Y^M}=0 \tag{2·10}$$

となって、(2·6) と (2·5) が等価となる。

したがって、Y^M についての方程式を解いて標準計量を求めるには、方程式 (2·5) を解けばよいことがわかった。さらに、方程式 (2·5) を解くには、与えられた計量 $g_{\mu\nu}$ の下で共変微分の作用によって消える 2 階のテンソル $C_{\mu\nu}$ を求め、次式

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\rm mass}}{\delta g^{\mu\nu}}=C_{\mu\nu} \tag{2·11}$$

をみたす標準計量を求めることに帰着する。最も簡単な $C_{\mu\nu}$ は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の定数倍である。この場合、質量項が宇宙項に等しい寄与を与えることは方程式 (2·5) より明らかである。

(January 30, 2015)

References

1) H. van Dam and M. J. G. Veltman, "Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields," Nucl. Phys. B **22** (1970) 397;
V. I. Zakharov, "Linearized gravitation theory and the graviton mass," JETP Lett. **12** (1970) 312 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **12** (1970) 447].
2) A. I. Vainshtein, "To the problem of nonvanishing gravitation mass," Phys. Lett. B **39** (1972) 393.
3) D. G. Boulware and S. Deser, "Can gravitation have a finite range?," Phys. Rev. D **6** (1972) 3368.
4) C. de Rham and G. Gabadadze, "Generalization of the Fierz-Pauli Action," Phys. Rev. D **82** (2010) 044020 [arXiv:1007.0443 [hep-th]].
5) C. de Rham, G. Gabadadze and A. J. Tolley, "Resummation of Massive Gravity," Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 231101 [arXiv:1011.1232 [hep-th]].
6) M. Fierz and W. Pauli, "On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field," Proc. Roy. Soc. Lond. A **173** (1939) 211.
7) T. Kugo and N. Ohta, "Covariant Approach to the No-ghost Theorem in Massive Gravity," PTEP **2014**, no. 4, 043B04 (2014) [arXiv:1401.3873 [hep-th]].