Ramond-Ramond Couplings of D-branes

杉下宗太郎 (京大理)

共同研究者: 橋本幸士 (阪大理, 理研)
寺嶋靖治 (京大基研)

arXiv: 1501.00995 (accepted in JHEP)

2015年3月6日@奈良 「弦の場の理論15奈良」

1. Introduction

Ramond-Ramond coupling of D-branes

$$S_{\mathrm{RR}} = T_q \sum_p \int C_{\mathrm{RR}}^{(p+1)} \wedge \mathrm{Tr}\, e^{2\pi\alpha' F}$$

Ramond-Ramond場　　massless gauge場

non BPSブレーンやブレーン-反ブレーン系の**BSFT**

タキオンも含んだ式に一般化

[Kraus & Larsen (2000), Takayanagi, Terashima & Uesugi (2000)]

BSFT (Boundary String Field Theory) とは？

- 開弦の場の理論の一種 [Witten (1992)]
- Background Independent Open SFT とも呼ばれる

disk上のnon-linear sigma model

$$S_{\text{worldsheet}} + I_B$$

- closed string background (on-shell)
- general boundary interaction (not conformal)

$$I_B = \int_0^{2\pi} d\tau\, \mathcal{V}$$

$$\mathcal{V} = b_{-1}\mathcal{O}, \quad \mathcal{O} = \sum \lambda^i \mathcal{O}_i$$

ゴースト数1

BSFT action $$\frac{\partial S}{\partial \lambda^i} = \frac{1}{2}\int d\tau d\tau' \langle \mathcal{O}_i(\tau)\{Q, \mathcal{O}\}(\tau')\rangle$$

物質場とゴーストがdecoupleしていると仮定すると、

bosonic SFT action $S(\lambda) = (\beta^i \frac{\partial}{\partial \lambda^i} + 1) Z(\lambda)$

$Z(\lambda)$: ディスク分配関数

[Witten(1992), Shatashvili(1993)]

超弦の場合、作用はディスク分配関数そのもの

$S(\lambda) = Z(\lambda)$ [Kutasov, Marino & Moore (2000), Marino (2001), Niarchos & Prezas (2001)]

例

$$I_{\mathrm{B}} = \int d\tau \left(-i\dot{X}^{\mu} A_{\mu}[X] + \frac{i}{2}\psi^{\mu}\psi^{\nu}F_{\mu\nu}[X] \right)$$

NS-NS sector

$$F_{\mu\nu} = \mathrm{const.}$$

$S[A_{\mu}] =$ DBI action

同様にしてnon BPSブレーンやブレーン-反ブレーン系に対応するactionを計算可能。

⇒ タキオンポテンシャルの厳密計算

Ramond-Ramond sector

$F_{\mu\nu} = \mathrm{const.}$ と仮定せずに一般に計算可能

（world-sheet SUSYのおかげ）

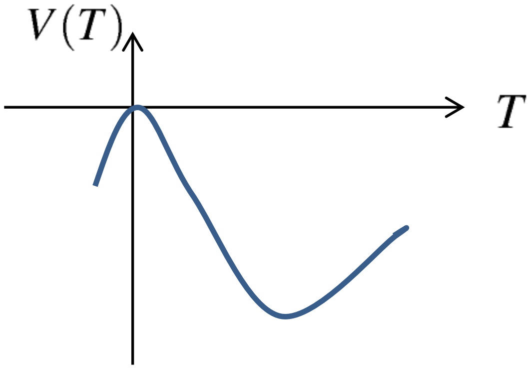
$$S_{\mathrm{RR}} = T_q \sum_p \int C_{\mathrm{RR}}^{(p+1)} \wedge \mathrm{Tr}\, e^{2\pi\alpha' F}$$

$F_{\mu\nu}$ の高階微分の補正なし

今回やったこと:
開弦のmassive modeも含めてRR couplingを計算

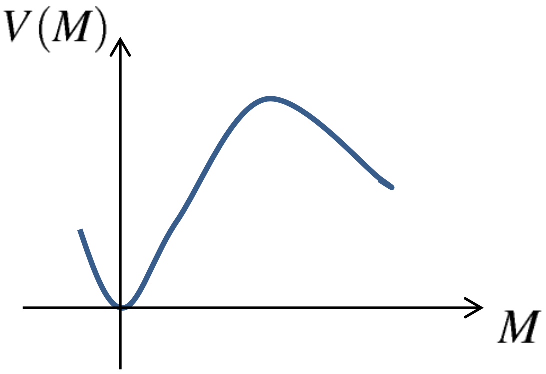
D-brane creation via massive mode condensation ?

tachyon condensation



D9-brane can be annihilated by tachyon condensation.

massive mode condensation



Multiple D9-branes can be created from single D9-brane by massive mode condensation ?

cf. bosonic SFT
[Hashimoto & Murata (2012)]

Contents

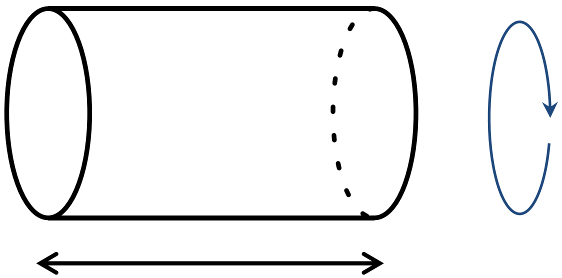
2. SUSY localization

閉弦の背景: flat + constant RR field

$$S_{\mathrm{worldsheet}} = \frac{1}{4\pi}\int d^2z\ \left[\partial_{\bar z}X^\mu\partial_z X^\mu + F^\mu F^\mu + \psi^\mu\partial_{\bar z}\psi^\mu + \tilde\psi^\mu\partial_z\tilde\psi^\mu\right]$$

$$(\alpha'=2)$$

注意: 世界面はディスクではなくシリンダーを考える。
結果はシリンダーの長さに依らない。



周期的 = RRセクター

$$C_{\mathrm{RR}} = -i\sum_{p=\mathrm{odd}}\frac{1}{(p+1)!}C^{(p+1)}_{\mu_0\cdots\mu_p}(2i)^{-(p+1)/2}\underline{\psi_0^{\mu_0}\cdots\psi_0^{\mu_p}}$$

fermion zero modes

$$S_{\mathrm{RR}} = \int \mathcal{D}X\, C_{\mathrm{RR}}\, e^{-S_{\mathrm{worldsheet}}-I_B}$$ を計算

SUSY変換と境界条件

- SUSY変換 (off-shell)　　境界条件を考えなければ (1,1) SUSY

$$\delta X^\mu = i\epsilon\psi^\mu + i\bar{\epsilon}\tilde{\psi}^\mu,$$

$$\delta\psi^\mu = -i\epsilon\partial_z X^\mu - i\bar{\epsilon}F^\mu,$$

$$\delta\tilde{\psi}^\mu = -i\bar{\epsilon}\partial_{\bar{z}} X^\mu + i\epsilon F^\mu,$$

$$\delta F^\mu = -i\epsilon\partial_z\tilde{\psi}^\mu + i\bar{\epsilon}\partial_{\bar{z}}\psi^\mu, \qquad (z = \tau + i\sigma)$$

- Neumann境界条件 $\Rightarrow$ D9-branesのBSFT

$$\partial_\sigma X^\mu| = (\psi^\mu - \tilde{\psi}^\mu)| = \partial_\sigma(\psi^\mu + \tilde{\psi}^\mu)| = F^\mu| = 0,$$

残るSUSYは半分　$\epsilon = \bar{\epsilon}$

この残ったSUSYを使って局所化

局所化の方法

$$Z = \int \mathcal{D}X \, \mathcal{O} \, e^{-S}$$

- 理論の対称性 δ s.t. $\delta S = \delta(\mathcal{D}X) = \delta\mathcal{O} = 0,$
- exact term δV s.t. $\delta^2 V = 0$

$$Z(t) = \int \mathcal{D}X \, \mathcal{O} \, e^{-S-t\delta V}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z(t) = \int \mathcal{D}X \, \delta(V \, \mathcal{O} \, e^{-S-t\delta V}) = 0$$

うまい δV をとると $Z(t)$ は $t \to \infty$ で簡単になる

今の場合、対称性 = worldsheet SUSY

境界つき多様体上の超対称理論の局所化 [SS, Terashima (2013)]

- SUSY exact term

$$S_{\mathrm{worldsheet}} \propto \delta \int d^2 z [(\partial_{\bar{z}} X^\mu + F^\mu)\psi^\mu + (\partial_z X^\mu - F^\mu)\tilde{\psi}^\mu]$$

表面項がでるが、境界条件により消える。

- SUSY inv.
  - C_{RR} は SUSY inv. ⟸ $\delta\psi_0 = 0$
  - 境界相互作用もSUSY不変なもののみ考える

$$S_{\mathrm{RR}} = \int \mathcal{D}X\, C_{\mathrm{RR}}\, e^{-S_{\mathrm{worldsheet}} - I_B}$$

$$= \int \mathcal{D}X\, C_{\mathrm{RR}}\, e^{-tS_{\mathrm{worldsheet}} - I_B}$$

$$S_{\mathrm{RR}} = \int \mathcal{D}X\, C_{\mathrm{RR}}\, e^{-tS_{\mathrm{worldsheet}} - I_B}$$

$t \to \infty$ での評価

$$X(\tau, \sigma) = X_0 + \sum_{n \neq 0} X_n\, f_n(\tau, \sigma)$$

zero mode: $S_{\mathrm{worldsheet}}$ に寄与しない

nonzero mode: $X_n \to \frac{1}{\sqrt{t}} X_n$ として $t \to \infty$ とすると

I_B への寄与が無視できる ⇨ freeなので積分可能

path int ⇨ int of zero modes

$$S_{\mathrm{RR}} = \mathcal{N} \int d^{10} X_0\, d^{10} \psi_0\, C_{\mathrm{RR}}\, e^{-I_B[X_0^\mu, \psi_0^\mu]}$$

境界相互作用の $X(\tau,\sigma)$は zeromode X_0 に置き換えてよい

$$I_B[T(X), A_\mu(X), \cdots] \Longrightarrow I_B[T(X_0), A_\mu(X_0), \cdots]$$

コメント

使ったのは世界面のSUSYなので、spacetime SUSYはなくてもよい

3. General RR couplings

boundaryでのSUSY変換

$$\delta X^\mu(\tau) = i\epsilon\psi^\mu(\tau),$$

$$\delta\psi^\mu(\tau) = -i\epsilon\partial_\tau X^\mu(\tau),$$

superfield $\mathbf{X}^\mu = X^\mu + i\theta\,\psi^\mu$

$$D_\theta = \partial_\theta + \theta\partial_\tau$$

boundary interactionの例

photon $I_{\rm B} = \int d\tau d\theta \;\left(-iD_\theta \mathbf{X}^\mu A_\mu[\mathbf{X}]\right)$

BPS D9-brane 1枚の場合

worldsheet-SUSY不変な境界相互作用

$$I_{\mathrm{B}} = -i \int d\tau d\theta \tilde{A}$$

$\Leftarrow$ I_B はbosonic なので $\tilde{A}$ はfermionic

(自然にGSO projection)

$$\tilde{A} = \sum A_{\mu_1^1 \cdots \mu_{n_1}^1, \mu_1^2 \cdots \mu_{n_2}^2, \cdots}(\mathbf{X}) \times D_\theta \mathbf{X}^{\mu_1^1} \cdots D_\theta \mathbf{X}^{\mu_{n_1}^1} D_\theta^2 \mathbf{X}^{\mu_1^2} \cdots D_\theta^2 \mathbf{X}^{\mu_{n_2}^2} \cdots$$

局所化計算 $\mathbf{X}^\mu = X^\mu(\tau) + i\theta\psi^\mu(\tau) \to X_0^\mu + i\theta\psi_0^\mu$

$$\Rightarrow \quad D_\theta \mathbf{X}^\mu = i\psi_0^\mu, \quad D_\theta^k \mathbf{X}^\mu = 0, \quad (k \geq 2)$$

$$\tilde{A} = \sum_{n_1 = \mathrm{odd}} A_{\mu_1 \cdots \mu_{n_1}}(\mathbf{X}) \underbrace{(i\psi_0^{\mu_1}) \cdots (i\psi_0^{\mu_{n_1}})}_{\text{完全反対称}}$$

反対称なモードのみ残る

$$\tilde{A} = \sum_{n_1=\mathrm{odd}} A_{\mu_1\cdots\mu_{n_1}}(\mathbf{X})\,(i\psi_0^{\mu_1})\cdots(i\psi_0^{\mu_{n_1}})$$

$$\Rightarrow\quad I_{\mathrm{B}} = -i\int d\tau d\theta\,\tilde{A}$$

$$= -i(2\pi)\sum_{p=\mathrm{odd}} \underbrace{\partial_{\mu_0} A_{\mu_1\cdots\mu_p}(X_0)(i\psi_0^{\mu_0})\cdots(i\psi_0^{\mu_p})}_{\text{(p+1)-form}}$$

$$\sim \sum_{p=\mathrm{odd}} F^{(p+1)}(X_0)$$

D9-brane charge formula

$$S_{\mathrm{RR}} = \mathcal{N}\int d^{10}X_0\, d^{10}\psi_0\, C_{\mathrm{RR}}\, e^{-I_B[X_0^\mu,\psi_0^\mu]}$$

$$\underline{= T_{D9}\int C_{\mathrm{RR}}\, e^{4\pi\mathcal{F}}} \quad\Leftarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{F} = d\mathcal{A}, \\ \mathcal{A} = \sum_{p=\mathrm{odd}} A^{(p)} \quad (p \leq 9) \end{array}\right.$$

N D9-$\overline{\mathrm{D9}}$ pairs

$N=2^{n-1}$の場合、boundary fermion を導入すると
境界相互作用は次のように書ける。

[Kraus & Larsen (2000), Takayanagi, Terashima & Uesugi (2000)]

boundary fermion $\quad \mathbf{\Gamma}^k = \eta^k(\tau) + \theta F^k(\tau)$

$$\tilde{A} = \sum A_{\mu_1^1\cdots\mu_{n_1}^1,\mu_1^2\cdots\mu_{n_2}^2,\cdots,k_1\cdots k_m}(\mathbf{X})$$
$$\times D_\theta \mathbf{X}^{\mu_1^1}\cdots D_\theta \mathbf{X}^{\mu_{n_1}^1}\, D_\theta^2 \mathbf{X}^{\mu_1^2}\cdots D_\theta^2 \mathbf{X}^{\mu_{n_2}^2}\cdots$$
$$\times \mathbf{\Gamma}^{k_1}\cdots\mathbf{\Gamma}^{k_m}$$

（和は $\tilde{A}$ がfermionicになるようにとる）

$$e^{-I_B} = \int \mathcal{D}\mathbf{\Gamma}\, e^{\int d\tau d\theta [\frac{1}{4}(\mathbf{\Gamma}^k D_\theta \mathbf{\Gamma}^k) - i\tilde{A}(\mathbf{X},\mathbf{\Gamma})]}$$

boundary fermion は Chan-Paton factor を入れることに対応

$$\tilde{A} = \sum A_{\mu_1^1 \cdots \mu_{n_1}^1, \mu_1^2 \cdots \mu_{n_2}^2, \cdots, k_1 \cdots k_m}(\mathbf{X}) \\ \times D_\theta \mathbf{X}^{\mu_1^1} \cdots D_\theta \mathbf{X}^{\mu_{n_1}^1} D_\theta^2 \mathbf{X}^{\mu_1^2} \cdots D_\theta^2 \mathbf{X}^{\mu_{n_2}^2} \cdots \\ \times \mathbf{\Gamma}^{k_1} \cdots \mathbf{\Gamma}^{k_m}$$

$$\mathbf{\Gamma}^k \to \gamma^k \,, \qquad \tilde{A}(\mathbf{X}) \to \begin{pmatrix} A_{DD}(\mathbf{X}) & A_{D\bar{D}}(\mathbf{X}) \\ A_{\bar{D}D}(\mathbf{X}) & A_{\bar{D}\bar{D}}(\mathbf{X}) \end{pmatrix}$$

BPS D9 1枚の場合と同様に、残るのは反対称なモードのみ

対角ブロックは奇数次のform
非対角ブロックは偶数次のform

$$e^{-I_B} = \int \mathcal{D}\mathbf{\Gamma}\, e^{\int d\tau d\theta [\frac{1}{4}(\mathbf{\Gamma}^k D_\theta \mathbf{\Gamma}^k) - i\tilde{A}(\mathbf{X},\mathbf{\Gamma})]}$$ の計算

公式 [Kraus & Larsen (2000)]

$M(\mathbf{X},\mathbf{\Gamma}) = M_0(\mathbf{\Gamma}) + \theta M_1(\mathbf{\Gamma})$ に対して

$$\int \mathcal{D}\mathbf{\Gamma}\, e^{\int d\tau d\theta [\frac{1}{4}\mathbf{\Gamma}^k D_\theta \mathbf{\Gamma}^k + M(\mathbf{X},\mathbf{\Gamma})]} = \mathrm{Str}\, \mathrm{P} e^{\int d\tau (M_1(\gamma) - (M_0(\gamma))^2)}$$

但し、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + (-)^{C'} BC' & AB' + (-)^{D'} BD' \\ (-)^{A'} CA' + DC' & (-)^{B'} CB' + DD' \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Str}(*) = \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \right]$$

general RR coupling formula

$$\boxed{S_{\rm RR} = T_9 \sum_p \int C^{(p+1)}_{\rm RR} \wedge {\rm Str}\, e^{4\pi \mathcal{F}}}$$

Quillen's superconnection $\mathcal{A} = \sum \mathcal{A}^{k_1\cdots k_m}_{\mu_1\cdots\mu_q} dx^{\mu_1}\cdots dx^{\mu_q}\gamma^{k_1}\cdots\gamma^{k_m}$

$$= \begin{pmatrix} A^+ & i^{\frac{3}{2}}\bar{T} \\ i^{\frac{3}{2}}T & A^- \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} A^\pm(X) = \sum_{p=\mathrm{odd}} A^{(p)}_\pm(X), \\ T(X) = \sum_{p=\mathrm{even}} T^{(p)}(X), \end{array} \right.$$

including massive modes

field strength

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} - i\mathcal{A}^2$$

$$= \begin{pmatrix} -\bar{T}T + dA^+ - iA^+A^+ & i^{\frac{3}{2}}(d\bar{T} - iA^+\bar{T} + i\bar{T}A^-) \\ i^{\frac{3}{2}}(dT - iA^-T + iTA^+) & -T\bar{T} + dA^- - iA^-A^- \end{pmatrix}$$

$$S_{\mathrm{RR}} = T_9 \sum_p \int C_{\mathrm{RR}}^{(p+1)} \wedge \mathrm{Str}\, e^{4\pi\mathcal{F}}$$

- non-BPS D9-branesの場合

$$A^+ = A^-, \quad T = \bar{T}$$

$$\mathrm{Str}(*) = \frac{(-i)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} *\right]$$

- charge quantization

Chern character of superconnection: $\mathrm{Str}\, e^{\frac{\mathcal{F}}{2\pi}}$

$$T_{D(p-2)}/T_{Dp} = 8\pi^2$$

D-brane charge is quantized

4. Discussion

ゲージ対称性

$$e^{-I_B} = \int \mathcal{D}\mathbf{\Gamma}\, e^{\int d\tau d\theta [\frac{1}{4}(\mathbf{\Gamma}^k D_\theta \mathbf{\Gamma}^k) - i\tilde{A}(\mathbf{X},\mathbf{\Gamma})]}$$

$\tilde{A} \to \tilde{A} + D_\theta \tilde{\lambda}$ としても不変

この変換はsuperconnectionのゲージ変換。

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A} + d\lambda + i[\lambda, \mathcal{A}]$$

$\mathrm{Str} f(\mathcal{F})$ はゲージ不変

$$\boxed{S_{\mathrm{RR}} = T_9 \sum_p \int C_{\mathrm{RR}}^{(p+1)} \wedge \mathrm{Str}\, e^{4\pi\mathcal{F}}}$$

higher formのパラメーターをもつゲージ対称性

massive mode condensation

$$S_{\mathrm{RR}} = T_{D9} \int C_{\mathrm{RR}}\, e^{4\pi \mathcal{F}}$$

$$S_{\mathrm{RR}} = T_9 \sum_p \int \, C_{\mathrm{RR}}^{(p+1)} \wedge \mathrm{Str}\; e^{4\pi \mathcal{F}}$$

タキオンと異なりmassive modeによって $C_{\mathrm{RR}}^{(10)}$ の係数を変えることはできない。

massive mode condensation によって
D9-brane charge を生成することはできない。

まとめ

- RR couplingに対応するBSFT actionをsusy localizationで計算
- 境界相互作用にmassive modeを入れても計算可能
- 開弦の無限個のmassive modeのうち、有限個の軽い完全反対称modeのみがカップル
- RR coupling は Quillenのsuperconnection を使って書かれる
- massive mode condensation によりD9 charge を作ることはできない

Future work

- Curved background
- Dp-branes
- NSNS sector
- 他のSFTとの比較 (field redefintion)
- massive modeの応用
- higher formの数理